高等代数的几何背景

张圣贵

福建师范大学数计学院

April 22, 2011

内容提要

内容提要

内容提要

点到平面的距离

在三维欧氏空间$\mathbb{R}^3$中, 设平面的一般方程:

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

则$M(x_1, y_1, z_1)$到平面Π的距离由下列二次规划刻画:

$$\begin{array}{rl} \min & (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \\ \text{st} & Ax + By + Cz + D = 0. \end{array}$$

点到直线的距离

设直线的一般方程:

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0,\end{cases}$$

则$M(x_1,y_1,z_1)$到直线L的距离由下列二次规划刻画:

$$\begin{aligned} \min\ & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2,\\ \text{st}\ & A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ & A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{aligned}$$

异面直线的距离

设直线L_1:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

直线L_2:

$$\begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \end{cases}$$

则直线L_1与直线L_2之间的距离可由下列二次规划刻划:

$$\begin{array}{rl} \min & (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \\ \text{st} & A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0, \\ & A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 = 0, \\ & A_3x_2 + B_3y_2 + C_3z_2 + D_3 = 0, \\ & A_4x_2 + B_4y_2 + C_4z_2 + D_4 = 0. \end{array}$$

直线与平面的夹角

设直线L方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 &= 0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 &= 0, \end{cases}$$

平面Π的方程为$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. 则L与Π的夹角可由下列二次规划来刻画:

$$\begin{aligned} \max\ & xu+yv+wz, \\ \text{st}\ & A_1x+B_1y+C_1z=0, \\ & A_2x+B_2y+C_2z=0, \\ & x^2+y^2+z^2=1, \\ & A_3u+B_3v+C_3w=0, \\ & u^2+v^2+w^2=1. \end{aligned}$$

线性流形

设 Y是向量空间 V的非空子集, 如果 Y中任意两个向量 α_1, α_2所确定的直线 $L=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2|k_1+k_2=1,k_1,k_2\in K\}$都含于 Y内, 就称 Y是 V中的线性流形.

数域 K上 n维向量空间 V中的线性流形 Y一定具有以下形式:

$$Y=\alpha_0+W=\{\alpha_0+\eta|\eta\in W\},$$

其中 α_0是 Y中任意取定的向量, W是 V的一个线性子空间, 它被 Y唯一确定, W称为 Y的方向子空间, Y称为 W型线性流形. $\dim W$被定义为 Y的维数.

例1 如果数域 K上的 n元非齐次线性方程组 $AX=b$ (其中 A是 $m\times n$阵, b是 m维列向量)有解, 则它的所有解组成的集合是一个 W型的线性流形 γ_0+W, 其中 γ_0是该非齐次线性方程组的一个特解, W是其导出组 $AX=0$的解空间.

问题提出

问题:

(1) 两线性流形之间能否定义距离? 如果定义了距离, 如何计算?

(2) 两线性流形之间能否定义夹角? 如果定义了夹角, 如何计算?

两线性流形之间距离的定义

定义1 设实数域$\mathbb{R}$上的n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的两个线性流形

$P_1 = \alpha_1 + W_1$, $P_2 = \alpha_2 + W_2$, 则 P_1, P_2之间的距离定义为:

$d(P_1, P_2) = \min\limits_{\beta_1 \in P_1,\ \beta_2 \in P_2} \| \beta_1 - \beta_2 \|$, 其中 $\| \beta_1 - \beta_2 \| = [(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2)]^{\frac{1}{2}}$.

注: 若$P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, 则$d(P_1, P_2) = 0$.

因为线性流形一定是闭集, 且对于任意$\beta_1 \in P_1, \beta_2 \in P_2$, 都有$\| \beta_1 - \beta_2 \| \geq 0$, 所以必存在$\alpha \in P_1, \beta \in P_2$, 使得$d(P_1, P_2) = \| \alpha - \beta \|$.

定义2 设$P_1 = \alpha_1 + W_1$, $P_2 = \alpha_2 + W_2$, 其中$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$, W_1, W_2都是$\mathbb{R}^n$的子空间, 且$P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $\dim W_1 > 0, \dim W_2 > 0$. 若存在$\beta_1 \in P_1$, $\beta_2 \in P_2$使得$L = \beta_1 + L_0 = \beta_2 + L_0$且$L_0 \perp W_1$, $L_0 \perp W_2$, 则称L是线性流形P_1和P_2的公垂线性流形.

两线性流形之间距离的相关结论

命题1 设A_1是实 $m_1 \times n$矩阵, A_2是实 $m_2 \times n$矩阵, b_1, b_2分别是 m_1, m_2维实列向量. 令 $M_1 = \{x|A_1x = b_1\} \neq \emptyset$, $M_2 = \{y|A_2y = b_2\} \neq \emptyset$, 且$M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $d(M_1, M_2)$是 M_1与M_2之间的距离, $\bar{x} \in M_1$, $\bar{y} \in M_2$. 若 $\| \bar{x} - \bar{y} \| = d(M_1, M_2)$, 则 $\bar{x} - \bar{y} \perp M_1 - \bar{x}, \bar{x} - \bar{y} \perp M_2 - \bar{y}$. 反之, 若 $\bar{x} - \bar{y} \perp M_1 - \bar{x}, \bar{x} - \bar{y} \perp M_2 - \bar{y}$, 则 $\| \bar{x} - \bar{y} \| = d(M_1, M_2)$.

在几何空间中, 过直线l外一点有唯一一条直线垂直于l, 一般地, 我们有

命题2 设M是$\mathbb{R}^n$的一个线性流形, 且$M \neq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus M$, 则存在唯一一个包含$\alpha$的一维线性流形$N$使得$N \perp M$.

两线性流形之间距离的求法

例2 令

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

则$M=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T|Ax=b\}=\{\beta_0+k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3|k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}\}$, 其中$\beta_0=(-1,0,-3,0,0)^T,\beta_1=(-1,1,0,0,0)^T,\beta_2=(-2,0,-2,1,0)^T,\beta_3=(-1,0,0,0,1)^T$. 令$\alpha=(1,1,1,1,1)^T$, 则$\alpha\notin M$.

两线性流形之间距离的求法

考虑下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1(\beta_1,\beta_1)+x_2(\beta_2,\beta_1)+x_3(\beta_3,\beta_1) & = & (\alpha-\beta_0,\beta_1) \\ x_1(\beta_1,\beta_2)+x_2(\beta_2,\beta_2)+x_3(\beta_3,\beta_2) & = & (\alpha-\beta_0,\beta_2) \\ x_1(\beta_1,\beta_3)+x_2(\beta_2,\beta_3)+x_3(\beta_3,\beta_3) & = & (\alpha-\beta_0,\beta_3) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3 & = & -1 \\ 2x_1+9x_2+2x_3 & = & -11 \\ x_1+2x_2+2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

解得$x_1=\frac{13}{19}, x_2=-\frac{29}{19}, x_3=\frac{13}{19}$.

则$\gamma=\beta_0+\frac{13}{19}\beta_1-\frac{29}{19}\beta_2+\frac{13}{19}\beta_3=(\frac{13}{19},\frac{13}{19},-\frac{1}{19}-\frac{29}{19}\frac{13}{19})^T$. 从

而$\gamma-\alpha=(-\frac{6}{19},-\frac{6}{19},-\frac{18}{19},-\frac{48}{19},-\frac{6}{19})^T$. 因此包含$\alpha$且垂直于$M$的一维线性流行

为$L=\alpha+\{k(\gamma-\alpha)|k\in\mathbb{R}\}$, α到M的距离为$\|\gamma-\alpha\|=\frac{12}{19}\sqrt{19}$.

两线性流形之间距离算例

例3 设

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}, b_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1&1&1&3&2\\1&1&2&5&3\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

可求得$A_1x=b_1$的解集$M_1=\{\xi_0+x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3|x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$, 其中

$$\xi_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$A_2x=b_2$的解集$M_2=\{\eta_0+y_1\eta_1+y_2\eta_2+y_3\eta_3|y_1,y_2,y_3\in\mathbb{R}\}$, 其中

$$\eta_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \eta_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

两线性流形之间距离算例

求解线性方程组:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1\xi_1^T\xi_1 + x_2\xi_2^T\xi_1 + x_3\xi_3^T\xi_1 - y_1\eta_1^T\xi_1 - y_2\eta_2^T\xi_1 - y_3\eta_3^T\xi_1 &=& (\eta_0-\xi_0)^T\xi_1 \\ x_1\xi_1^T\xi_2 + x_2\xi_2^T\xi_2 + x_3\xi_3^T\xi_2 - y_1\eta_1^T\xi_2 - y_2\eta_2^T\xi_2 - y_3\eta_3^T\xi_2 &=& (\eta_0-\xi_0)^T\xi_2 \\ x_1\xi_1^T\xi_3 + x_2\xi_2^T\xi_3 + x_3\xi_3^T\xi_3 - y_1\eta_1^T\xi_3 - y_2\eta_2^T\xi_3 - y_3\eta_3^T\xi_3 &=& (\eta_0-\xi_0)^T\xi_3 \\ x_1\xi_1^T\eta_1 + x_2\xi_2^T\eta_1 + x_3\xi_3^T\eta_1 - y_1\eta_1^T\eta_1 - y_2\eta_2^T\eta_1 - y_3\eta_3^T\eta_1 &=& (\eta_0-\xi_0)^T\eta_1 \\ x_1\xi_1^T\eta_2 + x_2\xi_2^T\eta_2 + x_3\xi_3^T\eta_2 - y_1\eta_1^T\eta_2 - y_2\eta_2^T\eta_2 - y_3\eta_3^T\eta_2 &=& (\eta_0-\xi_0)^T\eta_2 \\ x_1\xi_1^T\eta_3 + x_2\xi_2^T\eta_3 + x_3\xi_3^T\eta_3 - y_1\eta_1^T\eta_3 - y_2\eta_2^T\eta_3 - y_3\eta_3^T\eta_3 &=& (\eta_0-\xi_0)^T\eta_3 \end{array}\right. \tag{1}$$

即求解线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

两线性流形之间距离算例

解(2)得一般解:

$$\begin{cases} x_1 &= 1 + y_1 \\ x_2 &= y_1 \\ x_3 &= \frac{1}{3} + y_3 \\ y_2 &= -y_3 \end{cases}$$

其中y_1, y_3为自由未知量.

令$x^*(k,l) = \xi_0 + (1+k)\xi_1 + k\xi_2 + (\frac{1}{3} + l)\xi_3$, $y^*(k,l) = \eta_0 + k\eta_1 - l\eta_2 + l\eta_3$, 其中$k, l \in \mathbb{R}$. 则$d(M_1, M_2) = \| x^* - y^* \| = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

求得A_1的行空间与A_2的行空间的交空间的一个基为$\gamma = (0,0,1,2,1)^T$. 令$L_0 = \{a\gamma | a \in \mathbb{R}\}$, 则$L(k,l) = x^*(k,l) + L_0 = y^*(k,l) + L_0$是$M_1$与$M_2$的公垂流形, 其中$k, l \in \mathbb{R}$.

两线性流形之间夹角的定义

定义3 设W_1, W_2是数域K上的欧氏空间K^n的非平凡子空间, 令

$$L_1 = \{\alpha | 0 \neq \alpha \in W_1, \alpha \perp W_1 \cap W_2\},\ L_2 = \{\alpha | 0 \neq \alpha \in W_2, \alpha \perp W_1 \cap W_2\},$$

则W_1与W_2之间夹角定义为$\theta = \arccos \max\limits_{\alpha \in L_1, \beta \in L_2} \dfrac{\alpha^T \beta}{\sqrt{\alpha^T \alpha}\sqrt{\beta^T \beta}}$.

注1 若$W_1 \subseteq W_2$或$W_1 \supseteq W_2$, 则W_1与W_2之间夹角为$\theta = 0$.

注2 若$W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 则W_1与W_2之间夹角为$\theta = \arccos \max\limits_{0 \neq \alpha \in W_1, 0 \neq \beta \in W_2} \dfrac{\alpha^T \beta}{\sqrt{\alpha^T \alpha}\sqrt{\beta^T \beta}}$.

定义4 设$M_1 = \alpha_1 + W_1$, $M_2 = \alpha_2 + W_2$是K^n的两个线性流形, 其中$\alpha_1, \alpha_2 \in K^n$, W_1, W_2是K^n的两个非平凡子空间. M_1与M_2之间的夹角是指它们的方向子空间W_1与W_2之间的夹角.

注3 若线性流形$M_1 = \alpha_1 + W_1$与 $M_2 = \alpha_2 + W_2$平行, 即$W_1 \subseteq W_2$或$W_1 \supseteq W_2$, 则M_1与M_2之间夹角为$\theta = 0$.

两线性流形之间夹角的定义

设A_1和A_2分别是$m_1 \times n$和$m_2 \times n$矩阵, b_1和b_2分别是m_1和m_2维列向量,

且$\text{rank}A_1 = \text{rank}(A_1|b_1) < n$, $\text{rank}A_2 = \text{rank}(A_2|b_2) < n$.

则$W_1 = \{x|A_1x = 0\} \neq 0,\ W_2 = \{x|A_2x = 0\} \neq 0$. 设$\alpha_1$是$A_1x = b_1$的一个特解,

α_2是$A_2x = b_2$的一个特解,

则$M_1 = \{x|A_1x = b_1\} = \alpha_1 + W_1,\ M_2 = \{x|A_2x = b_2\} = \alpha_2 + W_2$. 故$M_1$与$M_2$的夹角就

是方向子空间W_1与W_2的夹角.

若$W_1 \cap W_2 = 0$, 则W_1与W_2的夹角可由下列二次规划刻画:

$$
\begin{aligned}
\max\ & x^T u \\
\text{st}\ & A_1 x = 0 \\
& A_2 u = 0 \\
& x^T x - 1 = 0 \\
& u^T u - 1 = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

两线性流形之间夹角的定义

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s_1}$是$W_1$的一个基, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{s_2}$是$W_2$的一个基, 则二次规划(1)等价于下列二次规划:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_2}\alpha_i^T\beta_j u_i v_j \\
\text{st}\ & \sum_{i=1}^{s_1}\sum_{j=1}^{s_1}\alpha_i^T\alpha_j u_i u_j - 1 = 0 \\
& \sum_{i=1}^{s_2}\sum_{j=1}^{s_2}\beta_i^T\beta_j v_i v_j - 1 = 0
\end{aligned}
\tag{4}
$$

两线性流形之间夹角的定义

若$W_1 \cap W_2 \neq 0$, 设$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r$是$W_1 \cap W_2$的一个基, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s_1-r}$是$W_1$的基, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s_2-r}$是$W_2$的基. 由定义, W_1与W_2的夹角就是寻找一个单位向量$\alpha \in L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s_1-r})$和另一个单位向量$\beta \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s_2-r})$使得$\alpha \perp W_1 \cap W_2$, $\beta \perp W_1 \cap W_2$且(α, β)值最大, 即W_1与W_2的夹角可由下列二次规划刻画:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{s_1-r} \sum_{j=1}^{s_2-r} \alpha_i^T \beta_j u_i v_j \\
\text{st} \quad & \sum_{i=1}^{s_1-r} \sum_{j=1}^{s_1-r} \alpha_i^T \alpha_j u_i u_j - 1 = 0 \\
& \sum_{i=1}^{s_2-r} \sum_{j=1}^{s_2-r} \beta_i^T \beta_j v_i v_j - 1 = 0 \\
& \sum_{i=1}^{s_1-r} \gamma_k^T \alpha_i u_i = 0, \ k = 1, 2, \cdots, r \\
& \sum_{i=1}^{s_2-r} \gamma_l^T \beta_i v_i = 0, \ l = 1, 2, \cdots, r
\end{aligned}
\tag{5}
$$

两线性流形之间夹角的定义

因为二次规划(3), (4)和(5)的可行域都是有界闭集, 且它们的目标函数都是多项式函数, 所以二次规划(3), (4)和(5)必有最优解. 因此两个非平凡子空间必有夹角.

两线性流形之间夹角的算例

例4 令

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\\0&0&1&1&0\\1&2&3&2&1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix},$$

则线性方程组$Ax=b$无解. 令

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&0\end{pmatrix}, b_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&2&3&2&1\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

则有两个不相交的线性流形$M_1=\{x|A_1x=b_1\}=\{\eta_0+u\eta_1+v\eta_2|u,v\in\mathbb{R}\}$与$M_2=\{x|A_2x=b_2\}=\{\xi_0+x\xi_1+y\xi_2+z\xi_3|x,y,z\in\mathbb{R}\}$, 其中

$$\eta_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \eta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \xi_0=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

两线性流形之间夹角的算例

令$W_1=\{u\eta_1+v\eta_2|u,v\in\mathbb{R}\}$, $W_2=\{x\xi_1+y\xi_2+z\xi_3|x,y,z\in\mathbb{R}\}$,
则$M_1=\eta_0+W_1$, $M_2=\xi_0+W_2$, 且$W_1\cap W_2=\{a\eta_2|a\in\mathbb{R}\}$.

取$\alpha=x\xi_1+y\xi_2+z\xi_3=(-2x+y-z,x,-y,y,z)^T\in W_1$,
$\beta=u\eta_1+v\eta_2=(-u+v,-v,0,u,v)^T\in W_2$.
则$(\alpha,\beta)=2xu+zu-3xv+yv,(\beta,\beta)=2u^2-2uv+3v^2$,
$(\alpha,\alpha)=5x^2-4xy+3y^2+4xz-2yz+2z^2,(\alpha,\eta_2)=-3x+y,(\beta,\eta_2)=-u+3v$. 故有
下列二次规划问题:

$$\begin{array}{rl}\max & 2xu+zu-3xv+yv\\ \text{st} & 2u^2-2uv+3v^2-1=0\\ & 5x^2-4xy+3y^2+4xz-2yz+2z^2-1=0\\ & -3x+y=0\\ & -u+3v=0\end{array}\tag{6}$$

两线性流形之间夹角的算例

由KKT条件得下列方程组

$$\begin{cases} -10xr + 4yr - 4zr - 2u + 3v + 3s & = 0 \\ 4xr - 6yr + 2zr - v - s & = 0 \\ -4xr + 2yr - 4zr - u & = 0 \\ -4uw + 2vw - 2x - z + t & = 0 \\ 2uw - 6vw + 3x - y - 3t & = 0 \\ 2u^2 - 2uv + 3v^2 - 1 & = 0 \\ 5x^2 - 4xy + 3y^2 + 4xz - 2yz + 2z^2 - 1 & = 0 \\ -3x + y & = 0 \\ -u + 3v & = 0 \end{cases} \tag{7}$$

两线性流形之间夹角的算例

利用代数系统软件CoCoA 4.7.4 在多项式环$\mathbb{Q}[x, y, z, u, v, w, r, s, t]$上计算得到理想

$$\begin{aligned} I \ = \ < & -10xr + 4yr - 4zr - 2u + 3v + 3s, \\ & 4xr - 6yr + 2zr - v - s, \\ & -4xr + 2yr - 4zr - u, \\ & -4uw + 2vw - 2x - z + t, \\ & 2uw - 6vw + 3x - y - 3t, \\ & 2u^2 - 2uv + 3v^2 - 1, \\ & 5x^2 - 4xy + 3y^2 + 4xz - 2yz + 2z^2 - 1, \\ & -3x + y, -u + 3v > \end{aligned}$$

的Gröbner基为

$$\{s, t, v^2 - \frac{1}{15}, zv + \frac{11}{24}r, r^2 - \frac{8}{65}, vr + \frac{8}{55}z, y - \frac{15}{22}z, z^2 - \frac{121}{312}, w - r, u - 3v, x - \frac{5}{22}z, zr + \frac{11}{13}v\}.$$

两线性流形之间夹角的算例

则方程组(7)等价于下列方程组:

$$\begin{cases} s &= 0 \\ t &= 0 \\ v^2 - \frac{1}{15} &= 0 \\ zv + \frac{11}{24}r &= 0 \\ r^2 - \frac{8}{65} &= 0 \\ vr + \frac{8}{55}z &= 0 \\ y - \frac{15}{22}z &= 0 \\ z^2 - \frac{121}{312} &= 0 \\ w - r &= 0 \\ u - 3v &= 0 \\ x - \frac{5}{22}z &= 0 \\ zr + \frac{11}{13}v &= 0 \end{cases} \tag{8}$$

求解方程组(8), 得解$(x, y, z, u, v, w, r, s, t) = (\frac{5}{22}z, \frac{15}{22}z, z, 3v, v, r, r, 0, 0)$, 则二次规划(6)的目标函数值为$\frac{48}{11}zv$. 此时,

$\alpha = (-\frac{17}{22}z, \frac{5}{22}z, -\frac{15}{22}z, \frac{15}{22}z, z)^T, \beta = (-2v, -v, 0, 3v, v)^T$, 其中$z = \pm\frac{11}{2\sqrt{78}}, v = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}$, $r = \pm\frac{4}{\sqrt{130}}$.

两线性流形之间夹角的算例

则当

$$\begin{cases} \alpha = (-\frac{17}{4\sqrt{78}}, \frac{5}{4\sqrt{78}}, -\frac{15}{4\sqrt{78}}, \frac{15}{4\sqrt{78}}, \frac{11}{2\sqrt{78}})^T \\ \beta = (-\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, 0, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}})^T \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \alpha = (\frac{17}{4\sqrt{78}}, -\frac{5}{4\sqrt{78}}, \frac{15}{4\sqrt{78}}, -\frac{15}{4\sqrt{78}}, -\frac{11}{2\sqrt{78}})^T \\ \beta = (\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}})^T \end{cases}$$

时, α与β的夹角就是M_1与M_2的夹角, 等于$\arccos(\frac{8}{\sqrt{130}})$.

谢谢！